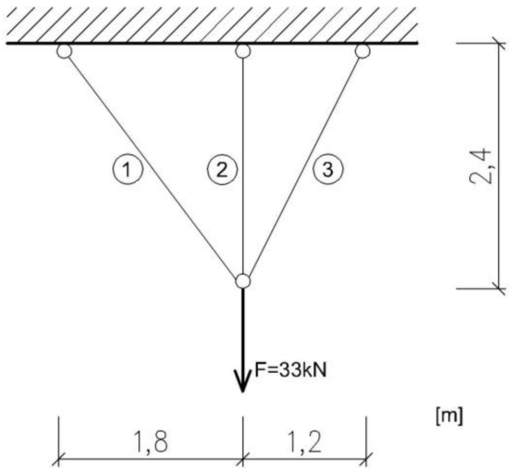
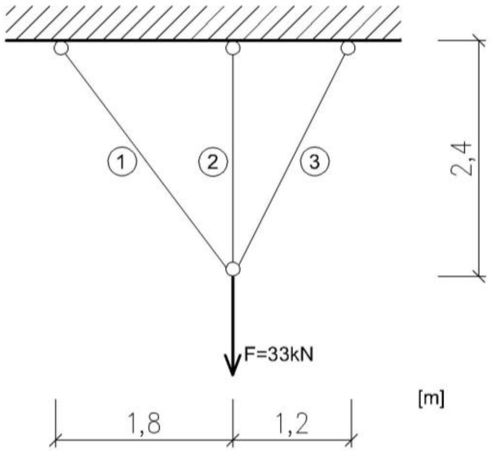


Obr.: Schéma konstrukce a zatížení

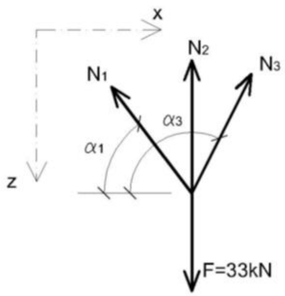
Břemeno zavěšené na táhlech

Zadání

Břemeno o tíze *33 kN* je zavěšeno na třech táhlech. Táhla jsou z oceli s modulem pružnosti $E = 210GPa$, Průměry táhel jsou $d_1 = 8mm$, $d_2 = 12mm$, $d_3 = 10mm$. Určete Normálové síly v jednotlivých táhlech.



Obr.: Schéma konstrukce a zatížení



Obr. Schéma sil působících na styčník a jejich úhly

Řešení

Určete průřezovou plochu jednotlivých táhel:

$A_1 =$ **(?)** [.$10^{-6}$$m^2$]

$A_2 =$ **(?)** [.$10^{-6}$$m^2$]

$A_3 =$ **(?)** [.$10^{-6}$$m^2$]

Určete délku jednotlivých táhel a směrové siny a cosiny jejich úhlů:

$L_1 =$ **(?)** [m]

$L_2 =$ **(?)** [m]

$L_3 =$ **(?)** [m]

$\cos\alpha_1 =$ **(?)**

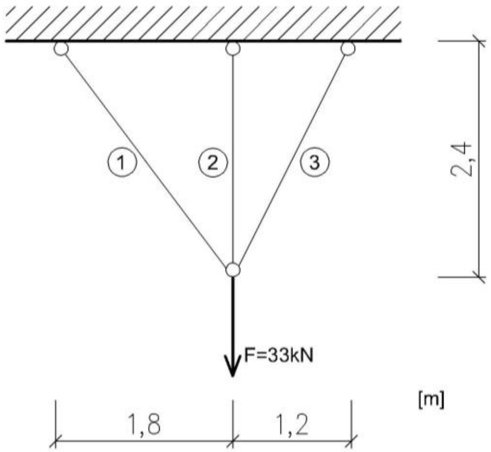
$\cos\alpha_2 =$ **(?)**

$\cos\alpha_3 =$ **(?)**

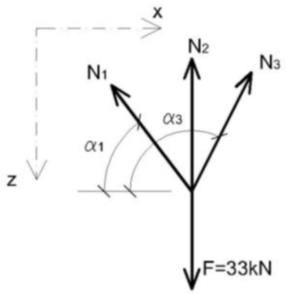
$\sin\alpha_1 =$ **(?)**

$\sin\alpha_2 =$ **(?)**

$\sin\alpha_3 =$ **(?)**



Obr.: Schéma konstrukce a zatížení



Obr. Schéma sil působících na styčník a jejich úhly

Průřezová plocha jednotlivých táhel:

$$A_1 = \pi . r_1^2 = 3{,}1415 . 0{,}004^2 = 50{,}2655 . 10^{-6} m^2$$

$$A_2 = \pi . r_2^2 = 3{,}1415 . 0{,}006^2 = 113{,}097 . 10^{-6} m^2$$

$$A_3 = \pi . r_3^2 = 3{,}1415 . 0{,}005^2 = 78{,}5398 . 10^{-6} m^2$$

Délka jednotlivých táhel a směrové siny a cosiny jejich úhlů

$$L_1 = \sqrt{2{,}4^2 + 1{,}8^2} = 3m$$

$$L_2 = 2{,}4m$$

$$L_3 = \sqrt{2{,}4^2 + 1{,}2^2} = 2{,}6833m$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{1{,}8}{3} = 0{,}6$$

$$\cos\alpha_2 = 0$$

$$\cos\alpha_3 = \frac{-1{,}2}{2{,}6833} = -0{,}4472$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{2{,}4}{3} = 0{,}8$$

$$\sin\alpha_2 = 1$$

$$\sin\alpha_3 = \frac{2{,}4}{2{,}6833} = 0{,}8944$$

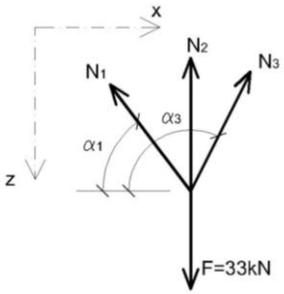
Napište statické podmínky rovnováhy pro styčník:

$$\sum F_{x,i} = 0$$

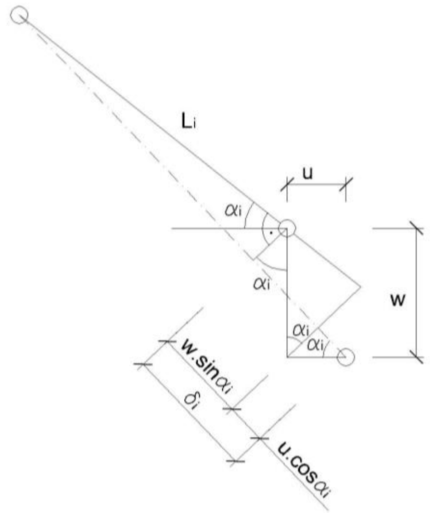
$$0{,}6 \cdot N_1 + \mathbf{(?)} \cdot N_2 + \mathbf{(?)} \cdot N_3 + \mathbf{(?)} = 0$$

$$\sum F_{z,i} = 0$$

$$0{,}8 \cdot N_1 + \mathbf{(?)} \cdot N_2 + \mathbf{(?)} \cdot N_3 + \mathbf{(?)} = 0$$



Obr. Schéma sil působících na styčník a jejich úhly



Obr.: Schéma protažení obecného prutu

Statické podmínky:

$$\sum F_{x,i} = 0$$

$$N_1 \cos\alpha_1 + N_3 \cos\alpha_3 = 0$$

$$N_1 \cdot 0{,}6 + N_3 \cdot (-0{,}4472) = 0$$

$$\sum F_{z,i} = 0$$

$$N_1 \sin\alpha_1 + N_2 + N_3 \sin\alpha_3 = F_z$$

$$N_1 \cdot 0{,}8 + N_2 + N_3 \cdot 0{,}8944 = 33 \cdot 10^3$$

Protažení prutů

Na základě geometrických závislostí je možné vyjádřit protažení jednotlivých prutů jako funkci posunutí konců prutů *u*, *w*.

$$\delta_i = w \cdot \sin\alpha_i + u \cdot \cos\alpha_i$$

Protažení je možné vyjádřit pomocí normálové síly v táhle

$$\delta_i = w \cdot \sin\alpha_i + u \cdot \cos\alpha_i = \frac{N_i L_i}{E_i A_i}$$

Odtud normálová síla

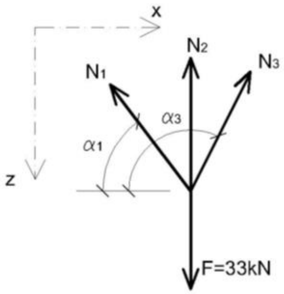
$$N_i = \frac{E_i A_i}{L_i}\left(w \cdot \sin\alpha_i + u \cdot \cos\alpha_i\right) = k_i\left(w \cdot \sin\alpha_i + u \cdot \cos\alpha_i\right)$$

Určete tuhosti táhel k_i:

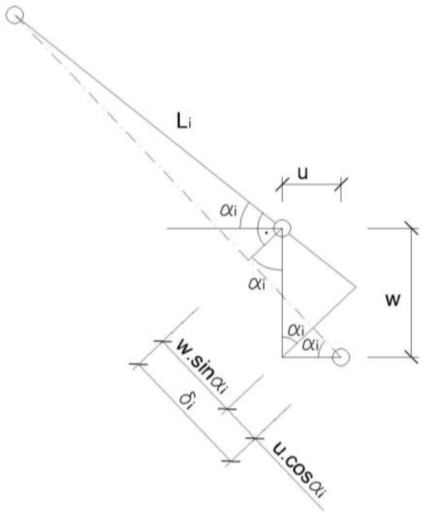
$k_1 =$ **(?)** [N/m]

$k_2 =$ **(?)** [N/m]

$k_3 =$ **(?)** [N/m]



Obr. Schéma sil působících na styčník a jejich úhly



Obr.: Schéma protažení obecného prutu

Tuhosti táhel k_i:

$$k_1 = \frac{EA_1}{L_1} = \frac{210 \cdot 10^9 \cdot 50{,}2655 \cdot 10^{-6}}{3} 3518585 N/m$$

$$k_2 = \frac{EA_2}{L_2} = \frac{210 \cdot 10^9 \cdot 113{,}097 \cdot 10^{-6}}{2{,}4} 9896017 N/m$$

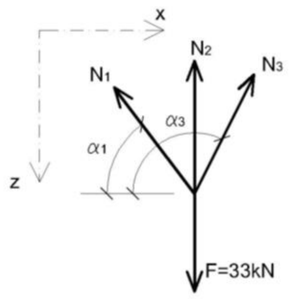
$$k_3 = \frac{EA_3}{L_3} = \frac{210 \cdot 10^9 \cdot 78{,}5398 \cdot 10^{-6}}{2{,}6833} 6146713 N/m$$

Normálové síly v táhlech jako funkce posunů styčníků w a u:

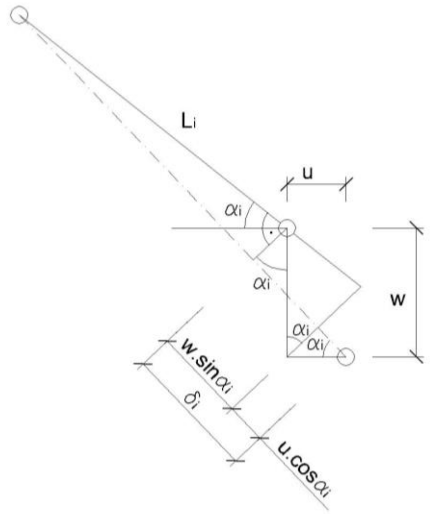
$$N_1 = \textbf{(?)} \cdot w + \textbf{(?)} \cdot u$$

$$N_2 = \textbf{(?)} \cdot w + \textbf{(?)} \cdot u$$

$$N_3 = \textbf{(?)} \cdot w + \textbf{(?)} \cdot u$$



Obr. Schéma sil působících na styčník a jejich úhly



Obr.: Schéma protažení obecného prutu

Normálové síly v táhlech jako funkce posunů styčníků

$$N_1 = \frac{EA_1}{L_1}\left(w \cdot \sin\alpha_1 + u \cdot \cos\alpha_1\right) = k_1\left(w \cdot \sin\alpha_1 + u \cdot \cos\alpha_1\right)$$

$$= 3518585(w \cdot 0{,}8 + u \cdot 0{,}6)$$

$$N_2 = \frac{EA_2}{L_2}\left(w \cdot \sin\alpha_2 + u \cdot \cos\alpha_2\right) = k_2 w = 9895987 \cdot w$$

$$N_3 = \frac{EA_3}{L_3}\left(w \cdot \sin\alpha_3 + u \cdot \cos\alpha_3\right) = k_3\left(w \cdot \sin\alpha_3 + u \cdot \cos\alpha_3\right)$$

$$= 6146669{,}4(w \cdot 0{,}8944 + u \cdot 0{,}4472)$$

$$N_1 = 2814868 \cdot w + 2111151 \cdot u$$

$$N_2 = 9895987 \cdot w$$

$$N_3 = 5497581 \cdot w + 2748791 \cdot u$$

Dosaďte normálové síly do statických podmínek:

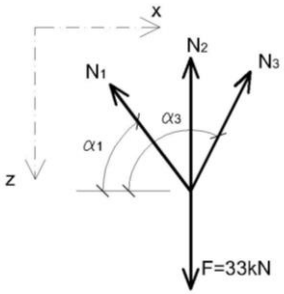
$$N_1 \cdot 0{,}6 + N_3 \cdot (-0{,}4472) = 0$$

$$N_1 \cdot 0{,}8 + N_2 + N_3 \cdot 0{,}8944 = 33 \cdot 10^3$$

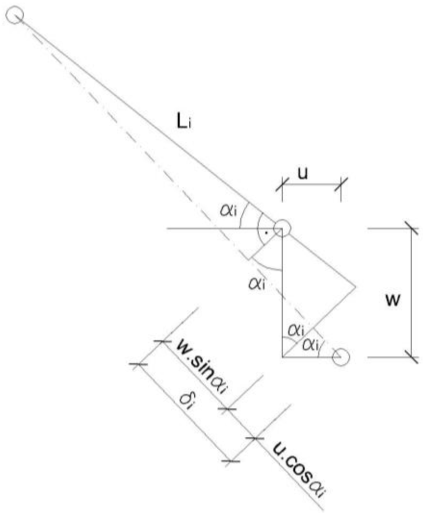
a určete neznámé posuny:

$u =$ **(?)** [m]

$w =$ **(?)** [m]



Obr. Schéma sil působících na styčník a jejich úhly



Obr.: Schéma protažení obecného prutu

Po dosazení do podmínek rovnováhy se získají dvě rovnice pro neznámé posuny konců táhel u a w.

$$k_1(w.\sin\alpha_1 + u\cos\alpha_1)\cos\alpha_1 + k_3(w.\sin\alpha_3 + u\cos\alpha_3)\cos\alpha_3 = 0$$

$$k_1(w.\sin\alpha_1 + u\cos\alpha_1)\sin\alpha_1 + k_2 w + k_3(w.\sin\alpha_3 + u\cos\alpha_3)\sin\alpha_3 = F_z$$

$$u(k_1\cos^2\alpha_1 + k_3\cos^2\alpha_3) + w(k_1\sin\alpha_1\cos\alpha_1 + k_3\sin\alpha_3\cos\alpha_3) = 0$$

$$u(k_1\sin\alpha_1\cos\alpha_1 + k_3\sin\alpha_3\cos\alpha_3) + w(k_1\sin^2\alpha_1 + k_2 + k_3\sin^2\alpha_3) = F_z$$

$$u(3518585\cdot 0{,}6^2 + 6146713\cdot(-0{,}4472)^2) +$$
$$w(3518585\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6 + 6146713\cdot 0{,}8944(-0{,}4472)) = 0$$

$$u(3518585\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6 + 6146713\cdot 0{,}8944\cdot(-0{,}4472)) +$$
$$w(3518585.0{,}8^2 + 9896017 + 6146713.0{,}8944^2) = 33.10^3$$

$$2496032\ \cdot u - 769765\ \cdot w = 0$$
$$-769765\ \cdot u + 17065281\ \cdot w = 33\cdot 10^3$$

řešením soustavy rovnic jsou přemístění

$$u = 0{,}60477\,.10^{-3}\,m$$

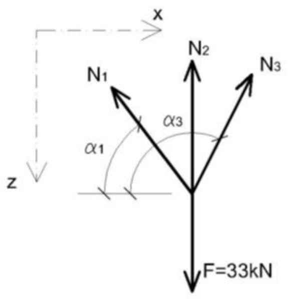
$$w = 1{,}96103\,.10^{-3}\,m$$

Dosaďte posuny do rovnic pro normálové síly a vypočtěte tyto síly:

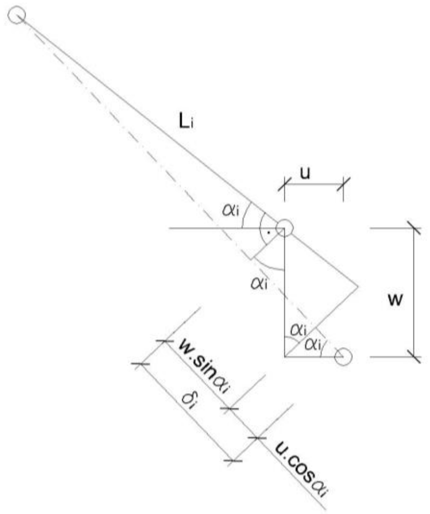
$N_1 =$ **(?)** [kN]

$N_2 =$ **(?)** [kN]

$N_3 =$ **(?)** [kN]



Obr. Schéma sil působících na styčník a jejich úhly



Obr.: Schéma protažení obecného prutu

Po zpětném dosazení posunů se získají normálové síly:

$$N_1 = k_1\left(w \cdot \sin\alpha_1 + u \cdot \cos\alpha_1\right)$$
$$= 3518585(1{,}9611 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}8 + 0{,}60467 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}6)$$
$$= 6797N = 6{,}797kN$$

$$N_2 = k_2 w = 9895987\ .1{,}9611\ .10^{-3} = 19407\ N = 19{,}406kN$$

$$N_3 = k_3\left(w \cdot \sin\alpha_3 + u \cdot \cos\alpha_3\right)$$
$$= 6146669{,}4(1{,}9611 \cdot 10^{-3}.0{,}8944 + 0{,}60467 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}4472)$$
$$= 9119N = 9{,}119kN$$